

Finanzmathematik

1.1 Prozentrechnung

K Grundwert (Basis, Bezugsgröße)
 p Prozentfuß
 i Prozentsatz ($i = \frac{p}{100}$)
 Z Prozentwert

$$\Rightarrow \boxed{Z = K \cdot i \text{ bzw. } Z = K \cdot \frac{p}{100}} \quad (1.1)$$

1.2 Einfache Zinsrechnung

Man spricht von einfacher Verzinsung, wenn die Zinsen ausbezahlt oder einem anderen Konto unverzinslich gutgeschrieben werden. Bei einfacher Verzinsung werden angefallene Zinsen der Vorperioden also **nicht** mitverzinst. Beim privaten Geldverleih ist die einfache Zinsrechnung gesetzlich vorgeschrieben (vgl. §248 BGB).

K_0 Anfangskapital (bzw. Barwert)
 K_n Endkapital (bzw. Endwert)
 n Laufzeit
 p Zinsfuß (bzw. $i = \frac{p}{100}$ Zinsrate, Zinssatz)

Zinsen werden in der Regel nach Ablauf der Zinsperiode gezahlt. Man spricht von **nachschüssigen Zinsen**. Werden Zinsen zu Beginn der Zinsperiode gezahlt, spricht man von **vorschüssigen Zinsen**. Als Zinsperiode wird in der Regel das Kalenderjahr angenommen. Beim **kaufmännischen Rechnen** wird das Jahr zu 12 Monaten und jeder Monat zu 30 Tagen gezählt. Beim **amtlichen Rechnen** werden die Tage nach dem Kalender ausgezählt. In der Praxis wird nach den Regeln des kaufmännischen Rechnens verfahren, wenn nicht ausdrücklich etwas Anderes vereinbart wird.

$$\Rightarrow \boxed{K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i)} \quad (1.2)$$

Bsp.: Ein Kapital von 500 Euro wächst nach 12 Jahren bei einfachen Zinsen und einem Zinssatz von 6 % p.a. auf $K_{12} = 500 \cdot (1 + 12 \cdot 0.06) = 860$ Euro.

Bsp.: Ein Betrag von 12 520 Euro wächst in 6 Jahren bei einfachen Zinsen auf 14 961,40 Euro an. Wie hoch ist der Zinsfuß?

Lös.: Anfangskapital $K_0 = 12\,520$ Euro; Endkapital $K_n = 14\,961,40$ Euro; Laufzeit $n = 6$ Jahre
 $\Rightarrow K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i) \Leftrightarrow i = \frac{1}{n} \left(\frac{K_n}{K_0} - 1 \right) \Leftrightarrow i = 0.0325$. Der Zinsfuß beträgt also $p = 3.25\%$.

Bsp.: Wieviele Jahre steht bei einfachen Zinsen der Betrag von 24 635,50 Euro bei einem Zinsfuß von $p = 4,75\%$ bis er 35 167,18 Euro beträgt?

Lös.: Anfangskapital $K_0 = 24\,635,50$ Euro; Endkapital $K_n = 35\,167,18$ Euro; Zinsfuß $p = 4,75\%$
 $\Rightarrow K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i) \Leftrightarrow n = \frac{1}{i} \left(\frac{K_n}{K_0} - 1 \right) \Leftrightarrow n = 9$. Die Laufzeit beträgt also $n = 9$ Jahre.

Amtliche und Kaufmännische Diskontierung:

Unter **Diskontierung** versteht man die Berechnung des Barwertes aus dem Endwert, also das inverse Vorgehen zur Aufzinsung. Man unterscheidet zwischen der **amtlichen** und der **kaufmännischen Diskontierung**! Die Formel zur Berechnung der amtlichen Diskontierung ergibt sich einfach nach Umstellen der Formel (1.2) nach K_0 :

$$\Rightarrow K_0 = \frac{K_n}{1 + n \cdot i} \quad (\text{amtliche Diskontierung}) \quad (1.3)$$

Bei der amtlichen Diskontierung werden die Zinsen vom Barwert berechnet, d.h.

$$K_n = K_0 + \underbrace{K_0 \cdot n \cdot i}_{\text{Zinsen vom Barwert}}, \quad (1.4)$$

wogegen bei der kaufmännischen Diskontierung die Zinsen vom Endwert berechnet werden:

$$K_n = K_0 + \underbrace{K_n \cdot n \cdot i}_{\text{Zinsen vom Endwert}}. \quad (1.5)$$

Daher ergibt sich bei der kaufmännischen Diskontierung folgende Berechnungsformel:

$$\begin{aligned} K_n &= K_0 + K_n \cdot n \cdot i & \Bigg| & - K_n \cdot n \cdot i \\ \Leftrightarrow K_0 &= K_n - K_n \cdot n \cdot i \\ \Leftrightarrow K_0 &= K_n \cdot (1 - n \cdot i) \quad (\text{kaufmännische Diskontierung}) \end{aligned} \quad (1.6)$$

Bsp.: Ein Endkapital von 4800 €, das 5 Jahre zu 4% p.a. stand (bei einfacher Verzinsung!), hatte bei amtlicher Diskontierung den folgenden Barwert: $K_0 = \frac{K_n}{1+n \cdot i} = \frac{4800}{1+5 \cdot 0,04} = 4000$ €.

Die kaufmännische Diskontierung wird beispielsweise angewandt, wenn der Besitzer eines Wechsels diesen von der Bank diskontieren lässt (sog. „Wechseldiskontierung“), d.h. dass er sich den (heutigen) Barwert der Wechselsumme von der Bank auszahlen lässt.

Bsp.: Ein Wechsel über 30 000 € wird 9 Monate vor Fälligkeit zur Diskontierung (bei einer Bank) eingereicht. Wie hoch ist sein Barwert, wenn die Bank mit 8% p.a. diskontiert?

$K_0 = K_n \cdot (1 - n \cdot i) = 30\,000 \cdot (1 - \frac{9}{12} \cdot 0,08) = 28\,200$ €.

Würde man diesen Betrag für neun Monate bei einfacher Verzinsung zu einem Zinssatz von 8 % p.a. anlegen, so erhielte man dagegen nur

$K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot i) = 28\,200 \cdot (1 + \frac{9}{12} \cdot 0,08) = 29\,892$ €

und nicht 30 000 €. Der Betrag, den die Bank für den Wechsel auszahlt, würde also bei direkter Wiederanlage zum gleichen Zinssatz nicht zu einem Endkapital von 30 000 € führen.

Bezeichnet man mit $K_0^{(a)}$ den Barwert bei amtlicher und mit $K_0^{(k)}$ den Barwert bei kaufmännischer Diskontierung, so lässt sich für die Differenz $K_0^{(a)} - K_0^{(k)}$ Folgendes berechnen:

$K_0^{(a)} - K_0^{(k)} = \frac{K_n}{1+n \cdot i} - K_n \cdot (1 - n \cdot i) = K_n \left[\frac{n^2 \cdot i^2}{1+n \cdot i} \right].$

Die Differenz stellt (unter Annahme einfacher Verzinsung) den „Gewinn“ der Bank bei der Wechseldiskontierung dar. Für unser Beispiel ergibt sich also:

$K_0^{(a)} = \frac{K_n}{1+n \cdot i} = \frac{30\,000}{1+\frac{9}{12} \cdot 0,08} = 28\,301,89$ €,

$K_0^{(k)} = K_n \cdot (1 - n \cdot i) = 30\,000 \cdot (1 - \frac{9}{12} \cdot 0,08) = 28\,200$ €,

$K_0^{(a)} - K_0^{(k)} = K_n \left[\frac{n^2 \cdot i^2}{1+n \cdot i} \right] = 30\,000 \left[\frac{(\frac{9}{12})^2 \cdot 0,08^2}{1+\frac{9}{12} \cdot 0,08} \right] = 101,89$ €.

Dieser Differenzbetrag von 101,89 € stellt (unter der Annahme einfacher Verzinsung) den „Gewinn“ der Bank bei der Wechseldiskontierung dar. Unter der Annahme einfacher Verzinsung ist aus finanzmathematischer Sicht nur die amtliche Diskontierung korrekt.

Bspl.: Ein Wechsel über 9000 € wird 225 Tage vor Fälligkeit zur Diskontierung (bei einer Bank) eingereicht. Der Diskontsatz beträgt 7%. Welchen Betrag erhält man von der Bank bei kaufmännischer Diskontierung gutgeschrieben? Wie hoch wäre dieser Betrag, wenn mit amtlicher Diskontierung gerechnet würde? Wie erklären Sie sich den Unterschied zwischen diesen beiden Werten?

Lös.: $K_0^{(k)} = K_n \cdot (1 - n \cdot i) = 9000 \cdot (1 - \frac{225}{360} \cdot 0,07) = 8606,25 \text{ €}$.

$$K_0^{(a)} = \frac{K_n}{1+n \cdot i} = \frac{9000}{1+\frac{225}{360} \cdot 0,07} = 8622,75 \text{ €},$$

$$K_0^{(a)} - K_0^{(k)} = K_n \left[\frac{n^2 \cdot i^2}{1+n \cdot i} \right] = 9000 \left[\frac{\left(\frac{225}{360}\right)^2 \cdot 0,07^2}{1+\frac{225}{360} \cdot 0,07} \right] = 16,50 \text{ €}.$$

Dieser Differenzbetrag von 16,50 € stellt (unter der Annahme einfacher Verzinsung) den „Gewinn“ der Bank bei der Wechseldiskontierung dar. Der Unterschied resultiert, da bei der amtlichen Diskontierung die Zinsen vom Barwert berechnet werden, wogegen bei der kaufmännischen Diskontierung die Zinsen vom Endwert berechnet werden!

Bsp.: Für die Bezahlung einer Rechnung vom 1.3.2002 hat ein Käufer drei Möglichkeiten:

- I) 160 000 € zahlbar am 1.3.2002, abzüglich 2% Skonto,
- II) 70 000 € zahlbar am 1.3.2002 ohne Abzug und drei Wechsel über 30 000 € fällig am 1.6.2002, am 1.9.2002 und am 1.12.2002,
- III) 11 Wechsel über 14860 €, der erste wird fällig am 31.3.2002, die übrigen jeweils am Ende der nächsten Monate (bis zum 30.1.2003).

Welcher Zahlungsplan ist für den Käufer am günstigsten, wenn der Diskontsatz 8% beträgt?

(Anmerkung: Es ist die kaufmännische Diskontierung anzuwenden.)

Lös.:

Alternative I: $K_0 = 160\,000 \cdot 0,98 = 156\,800 \text{ €}$.

Alternative II:

$$K_0 = 70\,000 + 30\,000 \cdot (1 - \frac{3}{12} \cdot 0,08) + 30\,000 \cdot (1 - \frac{6}{12} \cdot 0,08) + 30\,000 \cdot (1 - \frac{9}{12} \cdot 0,08) = 156\,400 \text{ €}.$$

Alternative III:

$$K_0 = 14\,860 \cdot (1 - \frac{1}{12} \cdot 0,08) + 14\,860 \cdot (1 - \frac{2}{12} \cdot 0,08) + \dots + 14\,860 \cdot (1 - \frac{11}{12} \cdot 0,08) = 156\,921,60 \text{ €}.$$

Also ist Alternative II am günstigsten.

1.3 Zinseszinsrechnung

Man spricht von Zinseszinsrechnung, wenn die dem Kapital nach einer Periode zugeschlagenen Zinsen in der nächsten Periode mitverzinst werden.

In der Zinseszinsrechnung ist es zweckmäßig, jährliche und unterjährliche Verzinsung getrennt darzustellen. Ebenso wird für die jährliche Verzinsung zwischen ganzzahligen und nichtganzzahligen Laufzeiten unterschieden.

1.3.1 Zinseszinsrechnung bei jährlicher Verzinsung und ganzzahlige Laufzeiten

Ein gegebenes Kapital K_0 , das mit einem Zinssatz i verzinst wird, wächst mit Zinseszins nach n Perioden auf

$$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n = K_0 \cdot q^n. \quad (1.7)$$

Das Kapital wächst als pro Jahr um den Aufzinsungsfaktor $q = 1+i$, wobei die Zinsen am Ende jeder Zinsperiode dem Kapital hinzugefügt werden.

Bsp.: Auf welchen Betrag wächst ein Kapital von 5000 € in 8 Jahren bei 5 % Zinseszinsen?

Lös.: $K_0 = 5000, n = 8, q = 1,05$

$$K_n = K_0 \cdot q^n = 5000 \cdot 1,05^8 = 7387,28 \text{ €}.$$

Bsp.: Wie lange dauert es, bis sich ein Kapital von 5000 € bei 5% Zinseszinsen verdoppelt?

Lös.: $K_0 = 5000, K_n = 10000, q = 1,05$

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$\Leftrightarrow 10000 = 5000 \cdot 1,05^n \quad | : 5000$$

$$\Leftrightarrow 2 = 1,05^n \quad | \ln \text{ anwenden}$$

$$\Leftrightarrow \ln 2 = n \cdot \ln 1,05 \quad | : \ln 1,05$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1,05} = 14,21.$$

Bsp.: Wie hoch war das Anfangskapital, wenn es in 5 Jahren bei 3% Zinseszinsen auf 742 € angewachsen ist?

Lös.: $K_n = 742, n = 5, q = 1,03$

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$\Leftrightarrow 742 = K_0 \cdot 1,03^5 \quad | : 1,03^5$$

$$\Leftrightarrow K_0 = 640,06 \text{ €}.$$

Bsp.: Ein Kapital von 57 000 € ist nach 8 Jahren auf 109 474,45 € angewachsen. Welchem Zinssatz entspricht das?

Lös.: $K_0 = 57\,000, K_n = 109\,474,45, n = 8$

$$K_n = K_0 \cdot q^n$$

$$\Leftrightarrow 109\,474,45 = 57\,000 \cdot q^8 \quad | : 57\,000$$

$$\Leftrightarrow 1,920604 = q^8 \quad | \sqrt[8]{}$$

$$\Leftrightarrow 1,085 = q.$$

1.3.2 Zinseszinsrechnung bei jährlicher Verzinsung und nichtganzzahlige Laufzeiten

Nun wird untersucht, wie sich ein zu einem beliebigen Zeitpunkt angelegtes Kapital K_0 bei einem jährlichen Zinssatz entwickelt. Dabei wird nicht mehr wie bisher unterstellt, dass die Laufzeit n ganzzahlig ist.

Es sei angenommen, dass die gesamte Laufzeit sich wie folgt verteilt:

- Anlage von K_0 für t_a Tage im ersten (unvollständigen) Jahr (der Index a steht für Anfang),
- n weitere ganze Jahre,
- t_e Tage im letzten (unvollständigen) Jahr (der Index e steht für Ende).

Im ersten (unvollständigen) Jahr der Laufzeit wird das Kapital **einfach** verzinst:

$$K_I = K_0 \cdot \left(1 + \frac{t_a}{360} \cdot i\right).$$

In den folgenden n ganzen Jahren wird das dann resultierende Kapital **mit Zinsen** verzinst:

$$K_{II} = K_I \cdot q^n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{t_a}{360} \cdot i\right) \cdot q^n.$$

Im letzten (unvollständigen) Jahr der Laufzeit wird das dann resultierende Kapital erneut **einfach** verzinst:

$$K_{III} = K_{II} \cdot \left(1 + \frac{t_e}{360} \cdot i\right) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{t_a}{360} \cdot i\right) \cdot q^n \cdot \left(1 + \frac{t_e}{360} \cdot i\right)$$

Man nennt diese Art der Verzinsung auch **gemischte Verzinsung**.

1.3.3 Zinseszinsrechnung bei unterjähriger Verzinsung und nichtganzzahlige Laufzeiten

Werden die Zinsen nicht jährlich, sondern in kürzeren Abständen (z.B. halbjährlich, vierteljährlich oder monatlich) dem Kapital zugeschlagen, so spricht man von unterjähriger Verzinsung.

Bsp.: Herr Müller legt zu Beginn eines Jahres einen Betrag von 10 000 € auf einem Konto für zehn Jahre an. Wie hoch wäre der Kontostand am Ende der Laufzeit

- a) bei einem jährlichen Zinssatz von 3,6%,
- b) bei einem halbjährlichen Zinssatz von 1,8%,
- c) bei einem vierteljährlichen Zinssatz von 0,9%,
- d) bei einem monatlichen Zinssatz von 0,3%,
- e) bei einem täglichen Zinssatz von 0,01%?

Lös.:

- a) $K_0 = 10\,000$, $i = 0,036$, $n = 10 \Rightarrow K_n = 10\,000 \cdot 1,036^{10} = 14\,242,87 \text{ €}$
- b) $K_0 = 10\,000$, $i = 0,018$, $n = 20 \Rightarrow K_n = 10\,000 \cdot 1,018^{20} = 14\,287,48 \text{ €}$
- c) $K_0 = 10\,000$, $i = 0,009$, $n = 40 \Rightarrow K_n = 10\,000 \cdot 1,009^{40} = 14\,310,23 \text{ €}$
- d) $K_0 = 10\,000$, $i = 0,003$, $n = 120 \Rightarrow K_n = 10\,000 \cdot 1,009^{40} = 14\,325,57 \text{ €}$
- e) $K_0 = 10\,000$, $i = 0,0001$, $n = 3600 \Rightarrow K_n = 10\,000 \cdot 1,0001^{3600} = 14\,333,04 \text{ €}$

Es ist zu sehen, dass die unterjährige Verzinsung aufgrund der Zinseszinsseffekte *ceteris paribus*^a zu einem höheren Endbetrag als die Jahresverzinsung führt.

^aCeteris paribus (lateinisch: alles andere gleich) = unter sonst gleichen Bedingungen.

Der **effektive Jahreszinssatz** i_{eff} ist der jährliche Zinssatz, der einem Zinssatz i bei unterjähriger Verzinsung äquivalent ist.

Man beachte folgende Arten von Zinssätzen:

- nomineller Jahreszinssatz i : kennzeichnet die Verzinsung p.a.
- relativer Zinssatz i_{rel} : gibt die Verzinsung pro unterjähriger Zinsperiode an
- effektiver Jahreszinssatz i_{eff} : welcher Jahreszinssatz führt zu demselben Wertzuwachs wie ein gegebener unterjähriger Zinssatz i_{rel}

Bsp.: Wie hoch ist der effektive Jahreszinssatz

- a) bei einem halbjährlichen Zinssatz von 1,8%,
- b) bei einem vierteljährlichen Zinssatz von 0,9%,
- c) bei einem monatlichen Zinssatz von 0,3%,
- d) bei einem täglichen Zinssatz von 0,01%?

Lös.:

$$a) K_0 \cdot (1 + i_{rel})^2 = K_0 \cdot (1 + i_{eff}) \Leftrightarrow (1 + i_{rel})^2 = 1 + i_{eff} \Leftrightarrow i_{eff} = (1 + i_{rel})^2 - 1$$

$$\text{Also gilt: } i_{eff} = (1 + 0,018)^2 - 1 = 0,03624$$

$$b) i_{eff} = (1 + 0,009)^4 - 1 = 0,0364889$$

$$c) i_{eff} = (1 + 0,003)^{12} - 1 = 0,03659998$$

$$d) i_{eff} = (1 + 0,0001)^{360} - 1 = 0,03665398$$

Der **konforme** (unterjährige) **Zinssatz** i_{kon} ist der unterjährige Zinssatz, der äquivalent mit einem Zinssatz i bei jährlicher Verzinsung ist.

Bsp.: Wie hoch ist bei jährlicher Verzinsung von 3,6% der konforme Zinssatz

- a) bei halbjährlicher Verzinsung,
- b) bei vierteljährlicher Verzinsung,
- c) bei monatlicher Verzinsung,
- d) bei täglicher Verzinsung?

Lös.:

$$a) K_0 \cdot (1 + i_{kon})^2 = K_0 \cdot (1 + i) \Leftrightarrow (1 + i_{kon})^2 = 1 + i \Leftrightarrow i_{kon} = \sqrt{1 + i} - 1$$

$$\text{Also gilt: } i_{kon} = \sqrt{1,036} - 1 = 0,017840852$$

$$b) i_{kon} = (1,036)^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,00888$$

$$c) i_{kon} = (1,036)^{\frac{1}{12}} - 1 = 0,0029516$$

$$d) i_{kon} = (1,036)^{\frac{1}{360}} - 1 = 0,0000982$$