Wahrscheinlichkeitsrechnung

Grundlegende Definitionen

Zufallsexperiment:
Unter einem Zufallsexperiment versteht man einen beliebig oft wiederholbaren Vorgang, der nach einer bestimmten Vorschrift ausgeführt wird und dessen Ergebnis nicht eindeutig vorherbestimmt ist (zufälliges Ergebnis).

Ergebnisraum Ω (im Skript mit E bezeichnet):
Die Menge aller Ergebnisse eines Zufallsexperimentes heißt Ergebnisraum.

Zufallsexperiment	*Ergebnisraum*
Einmaliges Werfen eines Würfels	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
Einmaliges Werfen einer Münze	$\Omega = \{K, Z\}$
Zweimaliges Werfen einer Münze	$\Omega = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$
Zweimaliges Werfen eines Würfels	$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 5), (6, 6)\}$

In realen Fragestellungen bezieht man sich meist nicht nur auf einzelne Ergebnisse, die bei einem Zufallsexperiment auftreten, sondern auch auf gewisse Teilmengen von Ω, wie z.B. dem Ereignis, dass eine gerade Zahl beim einmaligen Würfeln erscheint.

Ereignis (meist mit $A, B, C, D \ldots$ bezeichnet):
Die Teilmengen des Ergebnisraumes eines Zufallsexperimentes nennt man Ereignisse.

Beispiel: Wir betrachten nun das Zufallsexperiment „Einmaliges Werfen eines Würfels". Wie bekannt, sind die möglichen Ergebnisse dieses Zufallsexperimentes die sechs Augenzahlen des Würfels. Der Ergebnisraum hat also die Gestalt: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Mögliche Ereignisse sind z.B.:

verbale Beschreibung des Ereignisse	*mathematische Darstellung*
Werfen einer 1	$A = \{1\}$
Werfen einer 6	$B = \{6\}$
Werfen einer geraden Zahl	$C = \{2, 4, 6\}$
Werfen einer ungeraden Zahl	$D = \{1, 3, 5\}$
Werfen einer Zahl größer als 2	$F = \{3, 4, 5, 6\}$
Werfen einer Zahl von 1 bis 6 (sicheres Ereignis)	$G = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \Omega$
Werfen keiner Zahl von 1 bis 6 (unmögliches Ereignis)	$H = \{\}$ (leere Menge, auch mit $\emptyset$ bezeichnet)

Man kann sich noch weitere mögliche Ereignisse überlegen, in unserem Würfelbeispiel gibt es ingesamt $2^6 = 64$ solcher möglichen Ereignisse. Fasst man alle dieser möglichen Ereignisse zu einer Menge zusammen (einschließlich dem sicheren und dem unmöglichen Ereignis) so erhält man eine Menge von Mengen, den sogenannten Ereignisraum.

Ereignisraum $\mathcal{F}$ (im Skript mit Ω bezeichnet, daher Verwechselungsgefahr!):
Die Menge aller Ereignisse eines Zufallsexperimentes heißt Ereignisraum.

In unserem Würfelbeispiel besteht der Ereignisraum aus $2^6 = 64$ Elementen:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} = \{&\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{1,6\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{3,4\},\\ &\{3,5\}, \{3,6\}, \{4,5\}, \{4,6\}, \{5,6\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{1,2,6\}, \{1,3,4\}, \{1,3,5\}, \{1,3,6\},\\ &\{1,4,5\}, \{1,4,6\}, \{1,5,6\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{2,3,6\}, \{2,4,5\}, \{2,4,6\}, \{2,5,6\}, \{3,4,5\}, \{3,4,6\},\\ &\{3,5,6\}, \{4,5,6\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \{1,2,3,6\}, \{1,2,4,5\}, \{1,2,4,6\}, \{1,2,5,6\}, \{1,3,4,5\},\\ &\{1,3,4,6\}, \{1,3,5,6\}, \{1,4,5,6\}, \{2,3,4,5\}, \{2,3,4,6\}, \{2,3,5,6\}, \{2,4,5,6\}, \{3,4,5,6\},\\ &\{1,2,3,4,5\}, \{1,2,3,4,6\}, \{1,2,3,5,6\}, \{1,2,4,5,6\}, \{1,3,4,5,6\}, \{2,3,4,5,6\}, \Omega\}\end{aligned}$$

Die **Potenzmenge** $\mathcal{P}(A)$ einer Menge A ist die Menge aller Teilmengen von A. Die Anzahl der Elemente einer Menge A nennt man auch Mächtigkeit oder Kardinalität und bezeichnet diese mit $|A|$. Man kann zeigen, dass die Potenzmenge einer Menge A genau $2^{|A|}$ Elemente besitzt. In obigem Würfelbeispiel ist $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Die Mächtigkeit von Ω (also die Anzahl der Elemente von Ω) beträgt $|\Omega| = 6$. Für den Ereignisraum $\mathcal{F}$ wurde die Potenzmenge von Ω gewählt. Diese Potenzmenge $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ enthält also $2^{|\Omega|} = 2^6 = 64$ Elemente.

Ereignisalgebra (vgl. Skript!)

Die Ereignisse A und B heißen **disjunkt**, wenn gilt: $A \cap B = \emptyset$.

Beispiel 1.1:
Eine Münze wird dreimal geworfen. Man unterscheidet Kopf K und Zahl Z. Es werden folgende Ereignisse betrachtet:
A:=„Beim ersten Wurf erscheint Kopf“
B:=„Beim dritten Wurf erscheint Zahl“

a) Geben Sie den Ergebnisraum Ω für dieses Zufallsexperiment an!
b) Wie groß ist die Mächtigkeit von Ω?
c) Wieviele Elemente enthält der Ereignisraum $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$?
d) Stellen Sie die Ereignisse A und B in Mengenschreibweise dar.
e) Beschreiben Sie folgende Ereignisse in Worten und geben Sie die zugehörigen Ergebnismengen an: $A \cap B$; $A \cup B$; $\bar{A}$; $A \cap \bar{B}$; $\bar{A} \cap \bar{B}$.
f) Welcher Zusammenhang besteht zwischen $A \cup B$ und $\bar{A} \cap \bar{B}$?

Klassischer Wahrscheinlichkeitsbegriff

Nach der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit (nach Laplace) ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem bestimmten Zufallsexperiment das Ereignis A eintritt, der Quotient aus der Anzahl der günstigen Fälle und der Anzahl der möglichen Fälle:

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{|A|}{|\Omega|}.} \tag{1.1}$$

Dabei ist vorauszusetzen, dass der Ergebnisraum Ω endlich ist und alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind.

Beispiel: Wir betrachten wieder das Zufallsexperiment „Einmaliges Werfen eines Würfels“. Die möglichen Ergebnisse dieses Zufallsexperimentes sind die sechs Augenzahlen des Würfels. Man betrachtet die Ereignisse A:= „Werfen einer 1“ und B:= „Werfen einer geraden Zahl“. In Mengenschreibweise lassen sich diese Ereignisse wie folgt formulieren: $A := \{1\}$ und $B := \{2,4,6\}$. Unterstellt man, dass jede der sechs Augenzahlen (= Elementarereignisse) des Würfels gleichwahrscheinlich sind (fairer Würfel, idealer Würfel), so lassen sich die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A bzw. B nach der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit wie folgt bestimmen:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$$
$$P(B) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{3}{6}$$

Statistischer (häufigkeitstheoretischer) Wahrscheinlichkeitsbegriff (vgl. Skript!)

Additionssatz

Gegeben seien zwei beliebige Ereignisse A und B eines Zufallsexperimentes. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A \cup B$ ist dann:

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).} \tag{1.2}$$

Schließen sich die Ereignisse A und B gegenseitig aus (d.h. sind A und B disjunkte Ereignisse), dann ist $P(A \cap B) = 0$ und somit gilt **in diesem Fall**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \tag{1.3}$$

Komplementärwahrscheinlichkeit

Sind A und $\bar{A}$ Komplementärereignisse, so gilt:

$$\boxed{P(A) = 1 - P(\bar{A}).} \tag{1.4}$$

Beispiel 1.2:
Es werde nacheinander mit zwei idealen Würfeln geworfen. Man betrachtet folgende Ereignisse:
A:=„beide Augenzahlen sind gerade"
B:=„die Augensumme beträgt 8"
C:=„beide Augenzahlen sind kleiner oder gleich 4"

a) Geben Sie den Ergebnisraum Ω für dieses Zufallsexperiment an!
b) Wie groß ist die Mächtigkeit von Ω?
c) Wieviele Elemente enthält der Ereignisraum $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$? (Hinweis: Es sind sehr viele!)
d) Stellen Sie die Ereignisse A, B und C in Mengenschreibweise dar.
e) Man bestimme die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A, B, C, $\bar{A}$, $A \cap B$; $A \cup B$; $A \cap B \cap C$; $A \backslash C$, (d.h. A ohne C).

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Gegeben seien zwei Ereignisse A und B. Unter der bedingten Wahrscheinlichkeit für A gegeben B versteht man die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A unter der Bedingung, dass B eingetreten ist. Man berechnet die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A gegeben B (Schreibweise: $A|B$)

wie folgt:

$$\boxed{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}} \tag{1.5}$$

falls $P(B) > 0$. Vertauscht man in obiger Formel einfach A und B, so ergibt sich, falls $P(A) > 0$,

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \tag{1.6}$$

da $P(A \cap B) = P(B \cap A)$. Durch Umstellen der Formel (1.5) erhält man

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \tag{1.7}$$

und durch Umstellen der Formel (1.6)

$$P(A \cap B) = P(B|A) \cdot P(A). \tag{1.8}$$

Offensichtlich gilt daher

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A). \tag{1.9}$$

Sind die Ereignisse A und B unabhängig voneinander, dann ist $P(A|B) = P(A)$ und es folgt der **Multiplikationssatz für unabhängige Ereignisse**

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).} \tag{1.10}$$

Lösung zu Beispiel 1.1:

a) $\Omega = \{(K,K,K),(K,K,Z),(K,Z,K),(K,Z,Z),(Z,K,K),(Z,K,Z),(Z,Z,K),(Z,Z,Z)\}$

b) $|\Omega| = 8$

c) $|\mathcal{F}| = 2^8 = 256$

d) $A = \{(K,K,K),(K,K,Z),(K,Z,K),(K,Z,Z)\}$,
$B = \{(K,K,Z),(K,Z,Z),(Z,K,Z),(Z,Z,Z)\}$

e) $A \cap B =$ „Beim 1. Wurf erscheint Kopf und beim 3. Wurf erscheint Zahl".
$A \cap B = \{(K,K,Z),(K,Z,Z)\}$
$A \cup B =$ „Beim 1. Wurf erscheint Kopf oder beim 3. Wurf erscheint Zahl".
$A \cup B = \{(K,K,K),(K,K,Z),(K,Z,K),(K,Z,Z),(Z,K,Z),(Z,Z,Z)\}$
$\bar{A} =$ „Beim 1. Wurf erscheint kein Kopf".
$\bar{A} = \{(Z,K,K),(Z,K,Z),(Z,Z,K),(Z,Z,Z)\}$
$A \cap \bar{B} =$ „Beim 1. Wurf erscheint Kopf und beim 3. Wurf erscheint nicht Zahl".
$A \cap \bar{B} = \{(K,K,K),(K,Z,K)\}$
$\bar{A} \cap \bar{B} =$„Beim 1. Wurf erscheint nicht Kopf und beim 3. Wurf erscheint nicht Zahl".
$\bar{A} \cap \bar{B} = \{(Z,K,K),(Z,Z,K)\}$

f) $A \cup B$ und $\bar{A} \cap \bar{B}$ sind Gegenereignisse voneinander (vgl. De Morgan).

Lösung zu Beispiel 1.2:

a) $\Omega = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(6,5),(6,6)\}$

b) $|\Omega| = 36$

c) $|\mathcal{F}| = 2^{36}$

d) $A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}$
$B = \{(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)\}$
$C = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$

e) Es gilt:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{9}{36},$$
$$P(B) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{5}{36},$$
$$P(C) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{16}{36},$$
$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{9}{36} = \frac{27}{36},$$
$$P(A \cap B) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{|A \cap B|}{|\Omega|} = \frac{3}{36}, \quad \text{da } A \cap B = \{(2,6),(4,4),(6,2)\},$$
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{36} + \frac{5}{36} - \frac{3}{36},$$
$$P(A \cap B \cap C) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{|A \cap B \cap C|}{|\Omega|} = \frac{1}{36}, \quad \text{da } A \cap B \cap C = \{(4,4)\},$$
$$P(A \backslash C) = \frac{\text{Anzahl der günstigen Fälle}}{\text{Anzahl der möglichen Fälle}} = \frac{|A \backslash C|}{|\Omega|} = \frac{5}{36}, \quad \text{da } A \backslash C = \{(2,6),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}.$$